

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Descripción matemática:

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

Magnitud A	a	a'	a''	...
Magnitud B	b	b'	b''	...

El cociente o razón de las cantidades correspondientes es una constante, que se llama constante de proporcionalidad. Se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots = k \quad \text{se lee, ... } a \text{ es } b \text{ como } a' \text{ es } b', a'' \text{ es } b'' \dots$$

Situación real:

Si dos magnitudes son tales que a doble, triple, ... cantidad de la primera le corresponde doble, triple... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son directamente proporcionales.

Ejemplo 1:

Luís y Carlos llegan a Miami, Luís cambia 5000 € y le dan 2500 \$. A Carlos le dan 9000 \$, ¿cuántos € cambió Carlos?. ¿Cuál es el cambio €-\$?.

Dinero (\$)	2500	9000
Dinero (€)	5000	x

A Dinero (\$) ↑ ⇒ Dinero (€) ↑ luego son magnitudes **directamente proporcionales**

Método de proporciones

$$\frac{\$}{€} : \frac{2500}{5000} = \frac{9000}{x}; \quad x = \frac{5000 \times 9000}{2500} = 18000 €$$

Método de reducción a la unidad

$$\begin{array}{lcl} \text{Luís:} & 2500 \$ & \rightarrow 5000 € \\ & \frac{2500}{2500} \downarrow & \downarrow \frac{5000}{2500} \\ & 1 \$ & \rightarrow 2 € \\ & 1 \times 9000 \downarrow & \downarrow 2 \times 9000 \end{array}$$

$$\text{Carlos:} \quad 9000 \$ \rightarrow x € \quad x = 18000 €$$

Ejemplo 2:

Para hacer 30 litros de limonada usamos 10 kg de limones, para hacer 60 litros (el doble) usamos 20 kg de limones, para hacer 90 litros (el triple), usamos...

Limonada (l)	30	60	90
Limonas (kg)	10	20	...

Resolver.

Ejemplo 3:

Un saco de patatas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesarán 5 sacos?. Un cargamento de patatas pesa 520 kg. ¿Cuántos sacos se podrán hacer?.

Nº sacos	1	5	y
Peso (kg)	20	x	520

Resolver.

Ejemplo 4:

Un metro de cierta tela cuesta 6 euros. ¿Cuánto cuestan 75 m?. ¿Cuántos metros nos darán por 100 euros?.

Longitud (m)	1	75	y
Precio(€)	6	x	100

Resolver.

Ejemplo 5:

Luís y Carlos llegan a Lisboa. Luis cambia 50000 pts y le dan 65500 escudos. A Carlos le dan 90000 escudos. ¿Cuántas pesetas cambió Carlos?. ¿Cuál es el cambio peseta-escudo?.

Escudos	62500	90000
Pesetas	50000	x

Resolver.

PORCENTAJES Y PROPORCIONALIDAD

La proporcionalidad directa se expresa a menudo en porcentajes o tantos por ciento. Veamos algún ejemplo:

Ejemplo 6:

Si un jugador lanza 10 veces a canasta y encesta 4, ¿cuál es el porcentaje de encestes?

Lanzamientos	10	100
Canastas	4	x

Método de proporciones

$$\frac{\text{Lanzamientos}}{\text{Canastas}} : \frac{10}{4} = \frac{100}{x}; \quad x = \frac{4 \times 100}{10} = 40\%$$

Ejemplo 7:

En las rebajas de enero el descuento de una tienda es de un 20% sobre el precio indicado. Un señor compra un juego de toallas etiquetado con 90 euros. ¿Cuánto tiene que pagar?

Precio (pts)	90	x
A pagar (%)	100	80

Resolver.

Ejemplo 8:

Una señorita compra un coche cuyo precio de fábrica es de 8200 euros. A este precio hay que añadirle un 16 % de IVA (impuesto de valor añadido). ¿Cuál será el precio final del coche?

Precio (pts)	8200	x
A pagar (%)	100	116

Resolver.

Ejemplo 9:

Un titular de prensa dice: ... *tres de cada cinco españoles no beben alcohol*. ¿Qué porcentaje de españoles no beben alcohol?

Españoles preguntados	5	100
No beben alcohol	3	x

Resolver.

Ejemplo 10:

Unos análisis hechos en una granja de 7200 animales han dado un 24 % de animales enfermos. Se emplea una dosis de vitamina A como tratamiento en 2 de cada 3 animales. ¿Cuántas dosis de vitamina A se necesitan?

Animales	3	7200 · 0.24
Animales enf.	2	x

Método de proporciones

$$\frac{\text{Enfermos}}{\text{Sanos}} : \frac{3}{2} = \frac{1728}{x}; \quad x = \frac{2 \times 1728}{3} = 1152 \text{ dosis de vitamina A}$$

Ejemplo 11:

Se sabe que los dos quinceavos de la remolacha se convierten en azúcar. ¿Cuánta remolacha se necesita para obtener 2376 kg de azúcar?

Remolacha (kg)	2376	x
Tanto por uno	$\frac{2}{15}$	1

Método de proporciones

$$\frac{2376}{2/15} = \frac{x}{1}; \quad x = \frac{2376 \cdot 15}{2} = 17820 \text{ kg}$$

Ejemplo 12:

Calcula el tanto por ciento de alcohol en una mezcla de 3 litros de alcohol y 5 litros de agua.

Alcohol (l)	3	x
Mezcla (l)	8	100

Método de proporciones

$$\frac{\text{Alcohol}}{\text{Mezcla}} : \frac{3}{8} = \frac{x}{100}; \quad x = \frac{3 \times 100}{8} = 37.5\%$$

Ejemplo 13:

Luís hace limonada con 12 litros de agua y 8 litros de zumo de limón. ¿Cuál es el porcentaje de zumo de limón?

Limón (l)	8	x
Mezcla (l)	20	100

Método de proporciones

$$\frac{\text{Limón}}{\text{Mezcla}} : \frac{8}{20} = \frac{x}{100}; \quad x = \frac{8 \times 100}{20} = 40\%$$

Ejemplo 14:

En una granja, la peste porcina mata al 18% de los cerdos, quedando 164. ¿Cuántos han muerto?

Cerdos muertos	18	x
Cerdos vivos	100	x+164

Método de proporciones

$$\frac{\text{Muertos}}{\text{Vivos}} : \frac{18}{100} = \frac{x}{x+164}; \quad x = 36 \text{ Cerdos}$$

REPARTOS PROPORCIONALES DIRECTOS

Si dos magnitudes son directamente proporcionales, se cumple que si sumamos o restamos cantidades de una magnitud y las correspondientes de la otra, las cantidades obtenidas siguen siendo proporcionales a las dadas.

Magnitud A	a	a'	a''	...
Magnitud B	b	b'	b''	...

Se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots = \frac{a+a'+a''+\dots}{b+b'+b''+\dots} = k$$

Ejemplo 15:

Un puente ha costado 3150000 € y lo deben pagar tres ayuntamientos proporcionalmente a su número de habitantes que son 800, 625 y 575. ¿Cuánto pagará cada uno?.

MAGNITUDES	Ay.1	Ay.2	Ay.3	TOTALES
Aportación	a	b	c	3150000
Nº habitantes	800	625	575	2000

Se cumple:

$$\frac{a}{800} = \frac{b}{625} = \frac{c}{575} = \dots = \frac{3150000}{2000} = 1575_k$$

Si k es la constante de proporcionalidad:

El 1º pagará: 800 · k

El 2º pagará: 625 · k

El 3º pagará: 575 · k

Como: k = 1575 €

El reparto:

El 1º pagará: 800 · 1757 = 1260000 €

El 2º pagará: 625 · 1757 = 984375 €

El 3º pagará: 575 · 1757 = 905625 €

Ejemplo 16:

María, Elena y Pedro tienen que repartirse un premio de 50000 pts que les ha tocado en un décimo de lotería. Los valores de las participaciones son 200, 300 y 500 €, respectivamente. ¿Cuánto le toca a cada uno?.

MAGNITUDES	María	Elena	Pedro	TOTALES
Premios	a	b	c	50000
Participaciones	200	300	500	1000

Se cumple:

$$\frac{a}{200} = \frac{b}{300} = \frac{c}{500} = \dots = \frac{50000}{1000}$$

Resolver.

Ejemplo 17:

Un padre deja cierto capital, con la condición de que se reparta entre sus tres hijos proporcionalmente a sus edades, que son 10, 15 y 20 años. Halla lo que corresponde a cada uno sabiendo que la herencia es de 6300000 €.

Edades	10	15	20	45
Tocan	x	y	z	6300000

$$\frac{10}{x} = \frac{15}{y} = \frac{20}{z} = \dots = \frac{45}{6300000}$$

Resolver.

Ejemplo 18:

Una finca ocupa en un plano con escala de 1:50000, una extensión de 30 dm². Se ha comprado por 18 millones de euros. ¿A qué precio se ha pagado el metro cuadrado?.

Para calcular la superficie real (m²):

Plano	1	0.30 m ²
Real	50000	x

$$\frac{\text{Plano}}{\text{Real}} = \frac{1}{50000} = \frac{30}{x}; \quad x = \frac{30 \times 50000}{1} = 1500000 \text{ m}^2$$

Para calcular el precio del metro cuadrado:

Superficie (m ²)	15000	1
Precio (€)	1800000 0	y

$$\frac{\text{Superficie}}{\text{Precio}} = \frac{15000}{1800000} = \frac{1}{x}; \quad x = \frac{1 \times 1800000}{15000} = 120 \text{ €/m}^2$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Descripción matemática:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales:

Magnitud A	a	a'	a''	...
Magnitud B	b	b'	b''	...

Si el producto de las cantidades correspondientes es una constante.

$$a \cdot b = a' \cdot b' = a'' \cdot b'' = \dots = k$$

Situación real:

Si dos magnitudes son tales que a doble, triple, ... cantidad de la primera le corresponde la mitad, la tercera parte... de la segunda entonces se dice que esas magnitudes son inversamente proporcionales.

Ejemplo 19:

Se reparte un premio de quinielas por valor de 720 millones. Si hay un único acertante, le tocan 720 millones; si hay dos (el doble), les tocan 360 millones (la mitad) a cada uno; si hay tres (el triple), les tocan 240 millones (la tercera parte) a cada uno...

Nº acertantes	1	2	3	...
Premio (millones)	720	360	240	...

Observa que se cumple:

$$1 \cdot 720 = 2 \cdot 360 = 3 \cdot 240 = 4 \cdot x = \dots \quad \text{donde } x = 180$$

Ejemplo 20:

Si 6 pintores necesitan 54 días para pintar un edificio, ¿en cuánto tiempo lo pintarán 18 pintores?.

Nº pintores	6	18
Tiempo (días)	54	x

A Nº hombres $\uparrow \Rightarrow$ Tiempo (h) \downarrow luego son magnitudes **inversamente proporcionales**

Método de proporciones

$$N^{\circ} \text{ hombres} \times \text{Tiempo} = k; \quad 6 \times 54 = 18 \times t; \quad t = \frac{6 \times 54}{18} = 18 \text{ días}$$

Método de reducción a la unidad

Sit.1: 6 hombres \rightarrow 54 días

$$\frac{6}{6} = 1 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad 54 \times 6 = 324 \text{ días}$$

 1 hombre \rightarrow 324 días

$$1 \times 18 = 18 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \frac{324}{18} = 18$$

Sit.2: 18 hombres \rightarrow 18 días

Ejemplo 21:

Una fábrica de bombones necesita para envasar su producción diaria con cajas de $\frac{1}{2}$ kg, 3600 cajas. ¿Cuántas necesitará si quiere que sean de $\frac{1}{4}$ kg?. ¿Y si quiere que sean de 300 g?.

Nº cajas	3600	x	y
Tamaño (Kg)	0.5	0.25	0.300

Resolver.

Ejemplo 22:

Para abonar un campo se han necesitado 42300 kg de un cierto abono que contenía 25 % de nitrógeno. ¿Cuántos kg se necesitan de otro abono que contenga un 36 % de nitrógeno para que el campo reciba la misma cantidad de nitrógeno?.

Peso (kg)	42300	x
% N ₂	25	36

Resolver.

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Razonamiento:

Si x e y son magnitudes inversamente proporcionales, se cumple:

$$x \cdot y = k \quad \Rightarrow \quad x : \frac{1}{y} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1/y} = k$$

x e y son inversamente proporcionales
 x e $1/y$ son directamente proporcionales

Así que hacer un reparto inversamente proporcional a M, N, P es hacer un reparto directamente proporcional a los inversos: $1/M, 1/N, 1/P$.

Ejemplo 23:

Se reparte una gratificación de 1080 € entre los pastores de una ganadería, en partes inversamente proporcionales a las ovejas que han perdido. El primer pastor perdió solo una oveja; el segundo perdió tres ovejas, y el tercero seis ovejas. ¿Cuánto le tocará a cada uno?.

Si k es la constante de proporcionalidad:

Al primer pastor le corresponderá: $\frac{1}{1} \cdot k$

Al segundo pastor le corresponderá: $\frac{1}{3} \cdot k$

Al tercer pastor le corresponderá: $\frac{1}{6} \cdot k$

Se cumple que: $\frac{1}{1} \cdot k + \frac{1}{3} \cdot k + \frac{1}{6} \cdot k = 1080$; $k = 720$ €

El reparto:

Al primer pastor le corresponderá: $\frac{1}{1} \cdot 720 = 720$ €

Al segundo pastor le corresponderá: $\frac{1}{3} \cdot 720 = 240$ €

Al tercer pastor le corresponderá: $\frac{1}{6} \cdot 720 = 120$ €

Ejemplo 24:

Un padre decide repartir su herencia de 330000€ entre sus tres hijos, dando proporcionalmente más dinero a los que menos tienen. El mayor tiene 20000 €, el mediano 40000 € y el menor 5000 €. ¿Cuánto le toca a cada uno?.

Es un reparto inverso a 2, 4 y $\frac{1}{2}$ (dividiendo por 10000), luego directo a $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2$

Si k es la constante de proporcionalidad:

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + 2k = 330000; \quad k = 120000$$

El reparto queda:

Al mayor le corresponden: $\frac{1}{2} \times 120000 = 60000 \text{ €}$

Al mediano le corresponden: $\frac{1}{4} \times 120000 = 30000 \text{ €}$

Al pequeño le corresponden: $2 \times 120000 = 240000 \text{ €}$